

# 渐变气隙结构下单相无刷直流电机齿槽转矩解析建模

苏艳, 王喜莲, 赵海洲, 马彦深

(北京交通大学 电气工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 齿槽转矩的准确计算是解决单相无刷直流电机起动死点问题的基础。针对单相无刷直流电机有限元建模繁琐耗时的问题, 建立渐变气隙结构下单相无刷直流电机齿槽转矩的解析模型。首先推导渐变气隙结构下气隙磁密的解析表达式, 并利用能量法推导齿槽转矩的解析表达式, 对其中的气隙磁密和有效气隙长度函数进行简化和傅里叶分解, 最终得到齿槽转矩的解析模型。结合自适应复化梯形算法对该解析模型进行计算, 避免传统模型中变量物理意义模糊, 造成普适性差、预测精度低的问题。将渐变气隙结构下齿槽转矩的解析结果与有限元结果对比, 并重点分析过零点偏移角度和峰值, 验证所建立的齿槽转矩解析模型的正确性。该解析模型能够利用计算机编程实现快速准确地求解, 且模型中各变量均与电机结构相关、物理意义清晰, 便于设计人员优化齿槽转矩时寻找各变量之间的规律。

**关键词:** 解析模型; 有限元法; 齿槽转矩; 单相无刷直流电机; 起动; 渐变气隙

**DOI:** 10.15938/j.emc.2024.11.009

**中图分类号:** TM351

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-449X(2024)11-0094-10

## Analytical modeling of cogging torque of single-phase brushless DC motor with gradient airgap structure

SU Yan, WANG Xilian, ZHAO Haizhou, MA Yanshen

(Department of Electrical Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** Accurate calculation of cogging torque is the basis for solving the dead point problem in the start-up of single-phase brushless DC motor. Aiming at the problem of cumbersome and time-consuming finite element modeling of single-phase brushless DC motor, an analytical model of the cogging torque of single-phase brushless DC motor with gradient airgap structure was established. Firstly, the analytical expression for the airgap flux density with the gradient airgap structure was derived. Then, the energy method was employed to derive the analytical expression for the cogging torque. Subsequently, the airgap flux density and the effective airgap length function were simplified and Fourier decomposed. Finally, the analytical model for the cogging torque was obtained. The analytical model of cogging torque was calculated by the adaptive multi-segment trapezoidal algorithm to avoid the problem of poor generalization and low prediction accuracy caused by the ambiguous physical meaning of the variables in the traditional model. The analytical results of the cogging torque under the gradient airgap structure were compared with the finite element results, and the over-zero offset angle and peak value were analyzed to verify correctness of the established analytical model of cogging torque. The analytical model can be solved quickly and accu-

收稿日期: 2023-07-24

基金项目: 国家重点研发计划资助(2021YFB2500701)

作者简介: 苏艳(1999—), 女, 硕士, 研究方向为高速单相无刷直流电机设计与控制;

王喜莲(1974—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为电机及控制、电力电子与电力传动;

赵海洲(2000—), 男, 硕士, 研究方向为高速单相无刷直流电机设计与控制;

马彦深(1998—), 男, 博士研究生, 研究方向为电机的磁场调制、分析和优化。

通信作者: 王喜莲

rately by computer programming, and the variables in the model are related to the motor structure with clear physical meanings, which makes it easy for the designers to search for the laws between the variables when optimizing the cogging torque.

**Keywords:** analytical model; finite element method; cogging torque; single-phase brushless DC motor; start-up; gradient airgap

## 0 引言

单相无刷直流电机(single-phase brushless DC motor, SPBLDCM)由于结构简单、成本低廉、转速上限高等特点,被广泛应用于一些对动态性能无严格要求的小功率家用电器中,如风机、水泵、光盘驱动等<sup>[1-3]</sup>。然而,在对称结构的 SPBLDCM 中,齿槽转矩和电磁转矩的零点是重合的。因此,当电机在不通电的情况下,转子会稳定在磁阻转矩最小的位置,即静止在齿槽转矩的零点位置;而当电机通电后,作用在转子上的电磁转矩为 0,导致电机无法起动。为了克服电机的起动死点问题,SPBLDCM 通常采用非对称定子结构,使得电机静止时的齿槽转矩发生零点偏离,和电磁转矩的零点不再重合,此偏离角度能够为电机转子提供一定的起动转矩,实现 SPBLDCM 的自起动。

近年来,国内外学者围绕 SPBLDCM 本体结构,利用有限元法(finite element method, FEM)对齿槽转矩做了大量的研究。常用的不对称结构有阶梯型、渐变型、不对称开槽、不对称极靴 4 种。文献[4]研究了这 4 种常见的 SPBLDCM 不对称结构,研究表明,无论采用哪一种励磁方式,渐变型结构能显著降低齿槽转矩峰值,但转矩脉动仍然较大。为了优化齿槽转矩并减小转矩脉动,众多技巧性的研究纷纷涌现。文献[5]提出在定子交替使用均匀齿和渐变型齿,因此总气隙长度比传统不等气隙小,能够降低 48% 的齿槽转矩和 40% 的转矩脉动,从而提高效率。文献[6]提出在渐变气隙结构上增加薄端倾斜,研究表明,该方法与锥形气隙相比,起动转矩提高了 70% 以上,齿槽转矩大幅降低。文献[7]提出定子凸极铁心分段的新型拓扑结构,通过在每段选用不同的曲率半径,可以完全消除起动死点的存在和削弱齿槽转矩,但这增加了定子铁心的设计和生产难度。文献[8]提出在定子齿表面增加非对称半圆形辅助槽的设计,利用辅助槽尺寸及位置以调整齿槽转矩谐波的相位,从而实现峰值转矩削弱的效果。在此基础上,文献[9]对半圆形和

矩形这两种辅助槽形状进行了对比分析,研究结果表明,采用半圆形辅助槽能够更好地削弱齿槽转矩。文献[10]通过优化极弧比,确保反电动势波形呈现平滑的梯形形状,有效降低了电流谐波,在换向过程中实现了平稳的转矩输出。通过应用有限元法对 SPBLDCM 的结构进行研究,能够精确地分析漏磁效应、磁路饱和以及非对称齿槽结构等关键因素。但目前 Ansoft、Magnet 这些主流电机有限元分析软件等均无现成的 SPBLDCM 模型,设计人员需要进行大量的前处理,才能对 SPBLDCM 进行建模分析,整个设计过程繁琐而耗时。

除了有限元法,解析法(analytic method, AM)也被广泛地运用于电机的气隙磁场以及齿槽转矩的建模计算中。文献[11]结合能量法建立了渐变气隙结构 SPBLDCM 的齿槽转矩解析模型,但求解时需要气隙磁场能量逐次求导,较为复杂。文献[12]采用能量法经过傅里叶分解推导得出了齿槽转矩解析模型,并通过泰勒级数展开对渐变气隙的气隙磁导进行简化,该解析模型可定性分析齿槽转矩,但计算量巨大且复杂,且泰勒级数只保留前两项,造成了较大的计算误差。

有限元法虽然能够高精度地计算 SPBLDCM 的磁场,但是当考虑电机优化时,由于有限元法难以将分析结果与电机参数之间的内在联系描述清楚,若仅采用有限元法会非常耗时且效率很低。因此,利用解析模型中各变量与电机结构参数联系强、能够快速寻优的特点,可以在满足工程精度的情况下,利用计算机编程快速求解获得电机最优的设计方案,具有一定的应用价值。

本文首先建立渐变气隙结构下忽略齿槽效应的 SPBLDCM 气隙磁密解析模型,并与有限元法进行对比,以验证解析模型的正确性。在此基础上,利用能量法推导齿槽转矩的解析表达式,并对其中的气隙磁密和有效气隙长度函数进行简化和傅里叶分解,得到齿槽转矩的解析模型。引入数值积分的自适应复化梯形算法实现解析模型快速、精确地求解。最后将解析模型计算结果与有限元仿真结果对比,并

对起动死点影响最大的齿槽转矩过零点偏移角度和峰值进行分析,验证本文所建立的齿槽转矩解析模型的正确性。

## 1 电机结构

本文以一台渐变气隙结构下径向充磁、圆筒形内转子式的 SPBLDCM 为载体进行分析,电机模型示意图如图 1 所示。渐变气隙由偏心圆构成, $X$  为定子齿内沿偏心圆弧的圆心在水平方向偏离电机中心  $O$  的距离; $R_s$  为定子内径; $R_m$  为永磁体外径; $R_r$  为永磁体内径; $h_m$  为永磁体厚度; $g$  为气隙长度,他是一个与  $\theta$  有关的函数,且满足

$$R_s = R_r + h_m + g(\theta)。 \quad (1)$$

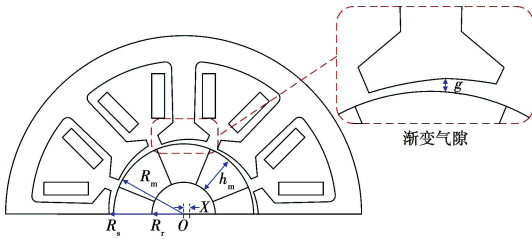


图 1 渐变气隙结构下 SPBLDCM 模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of SPBLDCM model with gradient airgap structure

构成 SPBLDCM 的主要结构参数如表 1 所示。

表 1 SPBLDCM 主要结构参数

Table 1 Main structure parameters of SPBLDCM

| 参数                                | 数值     |
|-----------------------------------|--------|
| 定子槽数 $N_s$                        | 8      |
| 极对数 $p$                           | 4      |
| 定子内径 $R_s/\text{mm}$              | 6      |
| 永磁体外径 $R_m/\text{mm}$             | 5.5    |
| 永磁体内径 $R_r/\text{mm}$             | 3      |
| 永磁体厚度 $h_m/\text{mm}$             | 2.5    |
| 电机轴向长度 $L_{\text{eff}}/\text{mm}$ | 23     |
| 永磁体材料                             | NdFe35 |
| 永磁体剩磁 $B_r/\text{T}$              | 1.23   |

为简化分析,对 SPBLDCM 模型作如下基本假设:

- 1) 忽略电机端部效应,磁场沿轴向均匀分布,因此可使用二维平面模型来等效真实的三维模型;
- 2) 将定子槽型等效为宽度与实际槽口相等、深度为足够深的矩形槽;

3) 忽略铁心磁阻,且铁心不会饱和,即电机定、转子铁心的相对磁导率为无穷大;

4) 永磁体的磁导率与空气相同,即  $\mu_r = 1$ ;

5) 忽略永磁体退磁效应,即退磁曲线为直线,不考虑永磁体的涡流损耗。

## 2 渐变气隙结构下无槽 SPBLDCM 气隙磁密解析模型推导

图 2 所示为渐变气隙结构下无槽 SPBLDCM 简化模型及其对应的气隙长度波形。为简化分析,假定气隙长度在 1 个定子齿间距范围下呈线性变化,则渐变气隙长度函数  $g(\theta)$  为

$$g(\theta) = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{\pi/p} \theta + \frac{g_{\max} + g_{\min}}{2}, \quad -\frac{\pi}{2p} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2p}。 \quad (2)$$

式中: $g_{\min}$  和  $g_{\max}$  分别为最小气隙长度和最大气隙长度,mm; $p$  为电机极对数。

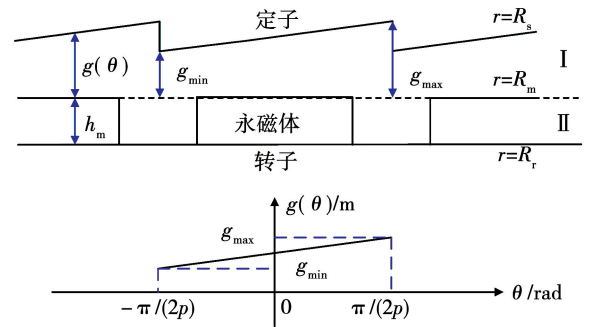


图 2 渐变气隙结构下无槽 SPBLDCM 简化模型及其对应的气隙长度波形

Fig. 2 Simplified model of slotless SPBLDCM with gradient airgap structure and its corresponding airgap length waveform

当定子为无槽结构时,图 2 所示的气隙域 I 和永磁体域 II 中的磁感应强度与磁场强度分别满足:

$$\left. \begin{aligned} B_{rI} &= \mu_0 H_{rI}, R_m < r < R_s; \\ B_{rII} &= \mu_0 \mu_r H_{rII} + \mu_0 M, R_r < r < R_m. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $B_{rI}$ 、 $B_{rII}$  分别对应电机气隙域 I 和永磁体域 II 的磁感应强度,T; $H_{rI}$ 、 $H_{rII}$  分别对应气隙域 I 和永磁体域 II 的磁场强度,A/m; $\mu_0$  为真空下的磁导率, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m; $\mu_r$  为永磁体磁导率, $\mu_r = 1$  H/m; $M$  为永磁体剩余磁化强度,A/m。

在二维极坐标下, $M$  可表示为

$$M = M_r r + M_\theta \theta。 \quad (4)$$

式中  $M_r$ 、 $M_\theta$  分别对应永磁体剩余磁化强度的径向和

切向分量。

$M_r, M_\theta$  可通过傅里叶级数分解表示为:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} M_n \cos(np\theta); \\ M_n &= \frac{2B_r \alpha_p}{\mu_0} \frac{\sin \frac{n\pi\alpha_p}{2}}{\frac{n\pi\alpha_p}{2}}; \\ M_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $B_r$  为永磁体剩磁, T;  $\alpha_p$  为永磁体的极弧系数。

电机气隙域 I 和永磁体域 II 的标量磁位分别满足如下的 Laplace 方程和 Poisson 方程, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial \theta^2} &= 0, R_m < r < R_s; \\ \frac{\partial^2 \varphi_{II}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{II}}{\partial \theta^2} &= \frac{\text{div} \mathbf{M}}{\mu_r}, R_r < r < R_m. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

再结合无槽 SPBLDCM 模型的磁场边界条件, 得到:

$$\left. \begin{aligned} H_{\theta I}(r, \theta) |_{r=R_s} &= 0; \\ H_{\theta II}(r, \theta) |_{r=R_r} &= 0; \\ B_{rI}(r, \theta) |_{r=R_m} &= B_{rII}(r, \theta) |_{r=R_m}; \\ H_{\theta I}(r, \theta) |_{r=R_m} &= H_{\theta II}(r, \theta) |_{r=R_m}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

于是, 在忽略齿槽效应的情况下, 可求得渐变气隙结构下 SPBLDCM 气隙磁密的径向分量  $B_{rI}$  和切向分量  $B_{\theta I}$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} B_{rI}(r, \theta) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} K_B(n) f_{Br}(r) \cos(np\theta); \\ B_{\theta I}(r, \theta) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} K_B(n) f_{B\theta}(r) \sin(np\theta). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:

$$K_B(n) = \frac{(np-1) + 2 \left( \frac{R_r}{R_m} \right)^{np+1} - (np+1) \left( \frac{R_r}{R_m} \right)^{2np}}{2 \left[ 1 - \left( \frac{R_r}{R_s} \right)^{2np} \right]} \times$$

$$\frac{\mu_0 M_n}{\mu_r} \frac{np}{(np)^2 - 1};$$

$$f_{Br}(r) = \left( \frac{r}{R_s} \right)^{np-1} \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^{np+1} + \left( \frac{R_m}{r} \right)^{np+1};$$

$$f_{B\theta}(r) = - \left( \frac{r}{R_s} \right)^{np-1} \left( \frac{R_m}{R_s} \right)^{np+1} + \left( \frac{R_m}{r} \right)^{np+1}.$$

在实际设计中, 为减少电机因气隙不均匀引起

的振动和噪声问题, 渐变气隙的尺寸通常会远小于定转子之间的气隙宽度。因此, 渐变气隙对等磁位面的影响可以忽略不计, 则可在工程应用范围内通过式(1)~式(8)来求解渐变气隙结构的情况。

以转子圆心为原点, 气隙测量半径取  $r = 5.6 \text{ mm}$ , 所得渐变气隙结构下无槽 SPBLDCM 气隙磁密的径向分量和切向分量的解析解与有限元解对比如图 3 所示。由图 3 可知, 由于忽略了定子齿尖的聚磁效应<sup>[13]</sup>, 解析解与有限元解波形存在一定误差, 但二者变化趋势大体一致, 由此验证了气隙磁密解析模型的正确性。

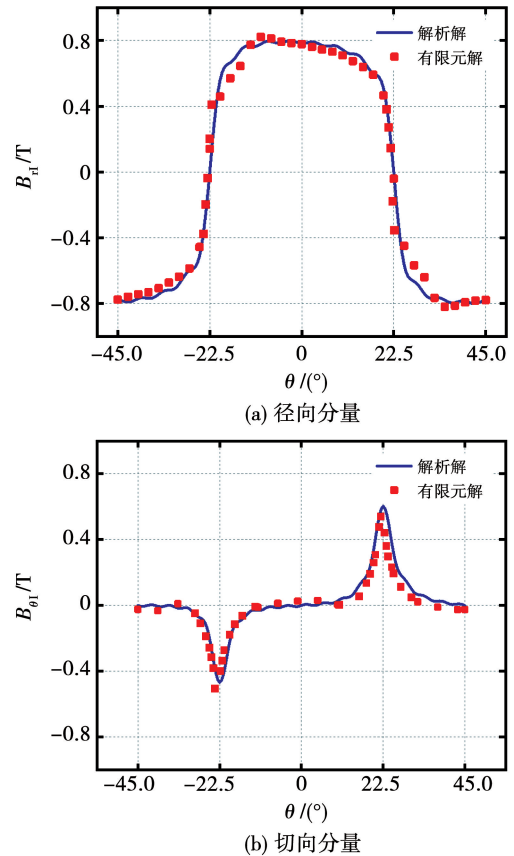


图 3 气隙磁密解析解与有限元解对比图

Fig. 3 Comparison of AM and FEM results of airgap flux density

### 3 基于能量法的渐变气隙结构下的齿槽转矩解析模型推导

图 4 所示为定子齿与磁极的相对位置, 规定  $\alpha = 0$  为定子齿中心线与磁极中心线对齐的位置,  $\theta = 0$  为磁极中心线。

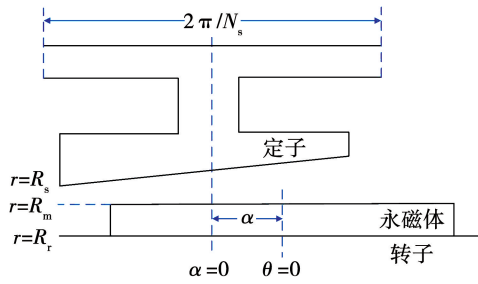


图4 定子齿与磁极的相对位置

Fig.4 Relative position of stator teeth and magnetic pole

齿槽转矩为定子铁心的齿槽和转子的磁极之间相互作用而产生的磁阻转矩,其为永磁电机独有的技术难题。根据能量法,齿槽转矩  $T_{\text{cog}}(\alpha)$  定义为电机绕组未通电时内部的磁场能量  $W(\alpha)$  相对于位置角  $\alpha$  的负导数,即

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = -\frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha}. \quad (9)$$

根据第一节中的假设3),电机内部的磁场能量主要来源于电机气隙和永磁体,而永磁体中的磁场能量不随位置角  $\alpha$  改变,一般可忽略,因此只对能产生齿槽转矩的气隙磁场能量进行考虑,即

$$W(\alpha) \approx \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{L_{\text{ef}}} \int_0^{2\pi} \int_{R_m}^{R_r+\delta(\theta,\alpha)} [B_r(\theta,\alpha) \times \frac{h_m}{\delta(\theta,\alpha)}]^2 r dr d\theta dz = \frac{L_{\text{ef}} h_m^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} B_r^2(\theta,\alpha) \times \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta,\alpha)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta,\alpha)} + 1 \right] d\theta. \quad (10)$$

式中  $B_r(\theta,\alpha)$ 、 $\delta(\theta,\alpha)$  分别为 SPBLDCM 气隙磁密和有效气隙长度沿圆周的分布函数。

由第2节的分析可知,渐变气隙结构下无槽 SPBLDCM 气隙磁密沿圆周的分布可以近似为沿  $y$  轴对称的平顶波,因此  $B_r^2(\theta,\alpha)$  为偶函数,可以在区间  $(\theta - \alpha) \in [-\pi/(2p), \pi/(2p)]$  进行傅里叶展开为

$$B_r^2(\theta,\alpha) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{ak} \cos[2kp(\theta - \alpha)]. \quad (11)$$

因为定子结构不对称,可对  $\frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta,\alpha)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta,\alpha)}$

在区间  $\theta \in [-\pi/N_s, \pi/N_s]$  进行傅里叶展开,即

$$\frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta,\alpha)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta,\alpha)} = G_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [G_{am} \cos(mN_s\theta) + G_{bm} \sin(mN_s\theta)]. \quad (12)$$

因为  $N_s = 2p$ ,由式(10)~式(12)可得

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^4 W_i(\alpha). \quad (13)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} W_1(\alpha) &= \frac{L_{\text{ef}} \pi}{2\mu_0} B_0 (G_0 + 1); \\ W_2(\alpha) &= \frac{L_{\text{ef}} h_m^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} B_0 \sum_{m=1}^{\infty} [G_{am} \cos(mN_s\theta) + G_{bm} \sin(mN_s\theta)] d\theta = 0; \\ W_3(\alpha) &= \frac{L_{\text{ef}} h_m^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} (G_0 + 1) \times \sum_{k=1}^{\infty} B_{ak} \cos[2kp(\theta - \alpha)] d\theta = 0; \\ W_4(\alpha) &= \frac{L_{\text{ef}} h_m^2}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} B_{ak} \cos[2kp(\theta - \alpha)] \times \sum_{m=1}^{\infty} [G_{am} \cos(mN_s\theta) + G_{bm} \sin(mN_s\theta)] \right\} d\theta. \end{aligned} \right\}$$

由于三角函数系具有正交性,因此当  $2kp \neq mN_s$  时可得:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \cos[2kp(\theta - \alpha)] \times \sum_{m=1}^{\infty} \cos(mN_s\theta) \right\} d\theta &= 0; \\ \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \cos[2kp(\theta - \alpha)] \times \sum_{m=1}^{\infty} \sin(mN_s\theta) \right\} d\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

又因  $2p = N_s$ ,令  $k = m = n$ ,则式(10)可表示为

$$W(\alpha) = \frac{L_{\text{ef}} \pi h_m^2}{2\mu_0} B_0 (G_0 + 1) + \frac{L_{\text{ef}} \pi h_m^2}{4\mu_0} \times \sum_{n=1}^{\infty} B_{an} [G_{an} \cos(2np\alpha) + G_{bn} \sin(2np\alpha)]. \quad (15)$$

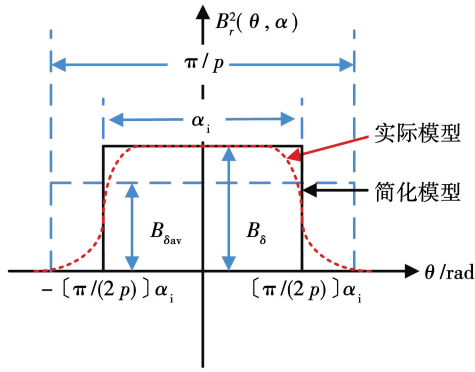
由式(9)和式(15),可得渐变气隙结构下 SPBLDCM 的齿槽转矩解析表达式为

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = \frac{L_{\text{ef}} p \pi h_m^2}{2\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} n B_{an} [G_{an} \sin(2np\alpha) - G_{bn} \cos(2np\alpha)]. \quad (16)$$

由式(16)可知,只要针对渐变气隙结构下的 SPBLDCM 模型,通过简化分析求得气隙磁密傅里叶系数  $B_{an}$ 、渐变气隙的相对磁导傅里叶系数  $G_{an}$  和  $G_{bn}$ ,即可求得相应的齿槽转矩解析模型。

### 3.1 永磁体的气隙磁密傅里叶系数 $B_{an}$

当电机永磁体厚度相同且均匀分布时,  $B_r(\theta, \alpha)$  沿圆周的分布函数可简化为沿  $y$  轴对称的矩形波,如图5所示。

图 5  $B_r^2(\theta, \alpha)$  沿圆周的分布Fig. 5  $B_r^2(\theta, \alpha)$  along the circumference

$B_r^2(\theta, \alpha)$  的各次傅里叶系数为

$$B_{an} = \frac{1}{\pi/2p} \int_{-\pi/2p\alpha_i}^{\pi/2p\alpha_i} B_r^2 h_m^2 \cos(2np\theta) d\theta = \frac{2}{n\pi} B_r^2 h_m^2 \sin(n\alpha_i \pi). \quad (17)$$

式中  $\alpha_i$  为计算极弧系数,其定义为一个极距下气隙磁密平均值与最大值的比值,即  $\alpha_i = B_{\delta av}/B_{\delta}$ 。

### 3.2 渐变气隙的相对磁导傅里叶系数 $G_{an}$ 和 $G_{bn}$

$G_{an}$  和  $G_{bn}$  的各次傅里叶系数分别为:

$$G_{an} = \frac{1}{\pi/N_s} \int_{-\pi/N_s}^{\pi/N_s} \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta)} \right] \cos(nN_s\theta) d\theta; \quad (18)$$

$$G_{bn} = \frac{1}{\pi/N_s} \int_{-\pi/N_s}^{\pi/N_s} \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta)} \right] \sin(nN_s\theta) d\theta. \quad (19)$$

有效气隙长度为磁通从永磁体内径  $R_r$  至定子齿内沿偏心圆弧的路径长度,如图 6 所示,其可根据路径的不同分为:

1) 经过渐变气隙的路径 1,其气隙长度按转子铁心到定子铁心的磁通路径计算;

2) 经过定子槽的路径 2,其气隙长度按转子铁心到定子铁心的直线距离和定子槽内理想化为四分之一圆弧的磁通路径之和计算。

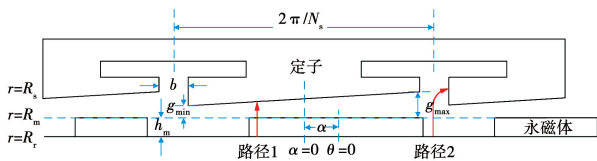


图 6 渐变气隙结构下 SPBLDCM 简化模型

Fig. 6 Simplified model of SPBLDCM with gradient airgap structure

由于 SPBLDCM 每个定子齿的结构是相同的,下面以其中一个定子齿为例,对齿槽转矩进行求解和分析。如图 7 所示,定子齿内沿为偏心圆弧,记偏心圆的圆心坐标为  $(X, 0)$ ,半径为  $R_g$ ,电机定子齿宽为  $t_s$ 。

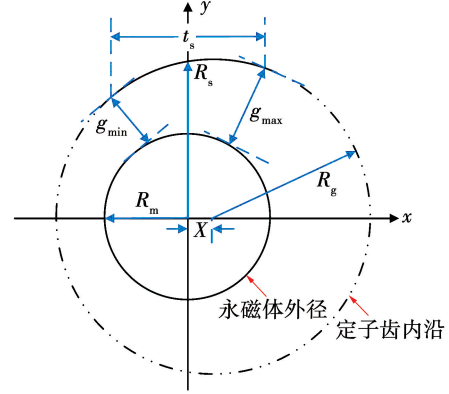


图 7 偏心圆弧示意图

Fig. 7 Schematic diagram of eccentric arc

以电机轴为极点,定子中心线为极轴,顺时针为极角的正方向,将偏离圆心坐标  $(X, 0)$  转换为极坐标  $(\rho_0, \theta_0)$ ,表示为:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= X; \\ \theta_0 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

定子齿内沿的偏心圆弧的半径  $R_g$  为

$$R_g = \sqrt{R_s^2 + X^2 - t_s X}. \quad (21)$$

根据极坐标下圆的方程,定子齿内沿的偏心圆弧的曲线方程为

$$(\rho \sin \theta - \rho_0)^2 + (\rho \cos \theta)^2 = R_g^2. \quad (22)$$

由式(20)~式(22),即可求得渐变气隙所对应的有效气隙长度,即路径 1 的长度为

$$\left. \begin{aligned} \delta(\theta) &= \sqrt{-\rho_0^2 \cos^2 \theta + R_g^2} + \rho_0 \sin \theta - R_r; \\ \theta &\in \left( -\frac{\pi}{N_s} + \frac{b}{2}, \frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将磁通在定子槽内的路径理想化为四分之一圆弧,且圆弧的半径为求解位置与定子齿端点的最短距离,则路径 2 的长度为:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\theta) &= -\frac{\pi(g_{\min} + R_m)}{2} \left( \theta + \frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2} \right) + h_m + g_{\min}, \theta \in \left[ -\frac{\pi}{N_s}, -\frac{\pi}{N_s} + \frac{b}{2} \right]; \\ \delta(\theta) &= \frac{\pi(g_{\max} + R_m)}{2} \left( \theta - \frac{\pi}{N_s} + \frac{b}{2} \right) + h_m + g_{\max}, \theta \in \left[ \frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2}, \frac{\pi}{N_s} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中:

$$g_{\min} = \sqrt{-\rho_0^2 \cos^2\left(-\frac{\pi}{N_s} + \frac{b}{2}\right) + R_g^2} + \rho_0 \sin\left(-\frac{\pi}{N_s} + \frac{b}{2}\right) - R_m;$$

$$g_{\max} = \sqrt{-\rho_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2}\right) + R_g^2} + \rho_0 \sin\left(\frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2}\right) - R_m.$$

#### 4 基于自适应复化梯形的齿槽转矩计算

渐变气隙函数沿圆周的分布如图8所示。由式(16)~式(24),即可得到渐变气隙结构下 SP-BLDCM 的齿槽转矩解析模型为

$$T_{\text{cog}}(\alpha) = \frac{pL_{\text{ef}}N_sB_r^2h_m^2}{\mu_0\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha\pi) \times \left\{ \int_{-\frac{\pi}{N_s}}^{\frac{\pi}{N_s}} \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta)} \right] \cos(nN_s\theta) d\theta \sin(2np\alpha) - \int_{-\frac{\pi}{N_s}}^{\frac{\pi}{N_s}} \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta)} \right] \sin(nN_s\theta) d\theta \cos(2np\alpha) \right\}. \quad (25)$$

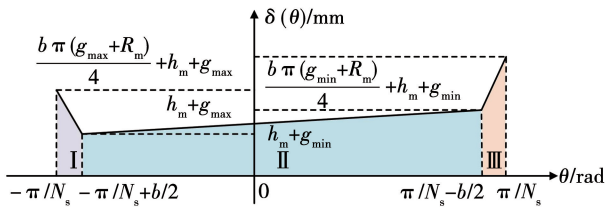


图8 渐变气隙函数沿圆周的分布

Fig. 8 Distribution of gradient airgap function along circumference

由式(25)可知,所推导出的齿槽转矩解析模型中各变量如  $p$ 、 $R_r$ 、 $R_m$ 、 $\delta(\theta)$  等均与电机结构相关、具有明确的物理意义,便于设计人员在齿槽转矩优化时寻找各变量之间的规律。但其定积分中含有三角函数与有效气隙长度分段函数的倒数的乘积,难以直接求解。为提高计算精度、减小计算量,采用自适应复化梯形求积法对解析模型进行求解。即当被积函数无法用表达式表示,或者被积函数有表达式但无法求得其原函数时,用数值积分的方法对其进行离散化<sup>[14]</sup>。先将求积区间分为  $N$  个子区间,并用低阶的求积公式求得每个子区间上的梯形面积,然后

将所有子区间的梯形面积进行累加求和,得到整个求积区间上的近似积分值。当被积函数为  $x(t)$ ,求积区间为  $[a, b]$  时,利用复化梯形公式得到的数值积分结果<sup>[15]</sup>为

$$T_n = \frac{h}{2} \left[ x(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x(t_i) + x(b) \right]. \quad (26)$$

式中:  $h = (b - a)/n$  为积分步长;  $t_i = a + ih$  为分点,其中  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $x(a)$  和  $x(b)$  为所选区间两端点上的函数值。

在使用复化梯形公式进行数值积分之前,必须选择适当的步长。如果步长太大,求积精度难以得到保证;而如果步长太小,将增加计算量。然而,事先确定一个合适的步长通常是困难的<sup>[16]</sup>。为解决上述问题,本文采用自适应复化梯形的求积方案。该方法通过逐次等分步长,在计算过程中反复利用复化梯形求积公式,直到每次等分前后的两次积分近似值接近为止。这种方法具有计算精度高、易于计算机编程实现的特点,相比有限元法而言,计算时间大大缩短。

本文以图8中第I部分为例应用自适应复化梯形求积法,具体算法流程如下所示。

步骤1:定义

$$\delta(\theta) = -\frac{\pi(g_{\min} + R_m)}{2} \left( \theta + \frac{\pi}{N_s} - \frac{b}{2} \right) + h_m + g_{\min};$$

步骤2:定义

$$f(\theta) = \left[ \frac{R_r^2 - R_m^2}{\delta^2(\theta)} + \frac{2R_r}{\delta(\theta)} \right] \cos(nN_s\theta);$$

步骤3:初始化积分区间  $[-\pi/N_s, -\pi/N_s + b/2]$  和精度要求  $\text{eps}$ ;

步骤4:使用复化梯形公式计算区间  $[-\pi/N_s, -\pi/N_s + b/2]$  上的积分值  $I_1$ ;

步骤5:将区间  $[-\pi/N_s, -\pi/N_s + b/2]$  二等分,继续使用复化梯形公式计算子区间上的积分值  $I_2, I_3$ ;

步骤6:计算I的近似误差  $e = 1/3 \times |I_1 - (I_2 + I_3)|$ ;

步骤7:如果  $e > \text{eps}$ ,则调用递归算法,将子区间继续二等分并计算积分值;否则,返回I为区间  $[-\pi/N_s, -\pi/N_s + b/2]$  的数值积分解,结束。

同理,可再使用两次自适应复化梯形求积法,对图8中II、III区间的数值积分解进行求解,将三次数值积分的结果进行累加,即可求得式(18),式(19)同理。通过以上步骤,得到渐变气隙结构下

SPBLDCM 齿槽转矩的解析模型。

## 5 有限元法验证

本文以一台内转子 SPBLDCM 为例,通过有限元仿真验证所提出的渐变气隙结构下 SPBLDCM 齿槽转矩解析模型的有效性。

如图 9 所示为在均匀气隙和渐变气隙结构下的 SPBLDCM 齿槽转矩有限元解。其中  $B$ 、 $D$  分别为均匀气隙结构下齿槽转矩的正峰值点和负峰值点。 $A$ 、 $C$ 、 $E$  是齿槽转矩的过零点。但由于在  $A$ 、 $E$  两点处,转子受力后将在齿槽转矩的作用下逐渐远离,因此该两点被认为是不稳定定位点,在本文中不予讨论,下文所提及的过零点均指的是稳定定位点  $C$ 。渐变气隙结构下的  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ 、 $D'$  点同理。

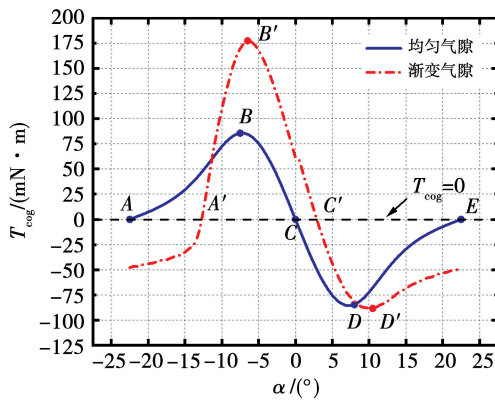


图 9 均匀气隙和渐变气隙结构下的 SPBLDCM 齿槽转矩有限元解

Fig. 9 FEM result of SPBLDCM cogging torque with uniform airgap and gradient airgap

由图 9 可知,由于电机转子倾向于在磁阻最小的位置停留,因此当 SPBLDCM 采用均匀气隙结构时,齿槽转矩和电磁转矩的过零点均位于定转子几何中心线  $\alpha = 0$  处。当定子绕组通电后,电机转子所受的电磁转矩也为 0,因此存在起动死点问题。另外,由于磁极与定子槽之间的相互作用,齿槽转矩的波形在一个极距范围内表现为正、负峰幅值相等,平均值为 0。而当 SPBLDCM 采用渐变气隙结构时,一方面,过零点会偏离  $\alpha = 0$  的位置,由点  $C$  位置向点  $C'$  位置移动,定义该夹角为过零点偏移角度;另一方面,会使齿槽转矩波形的正峰明显大于负峰。这与现有的理论分析结果相吻合,同时验证了有限元模型的正确性。

分别利用解析法和有限元法对定子偏离圆心距离  $X$  从 0 变化到 1 mm 时的齿槽转矩进行求解,并将计算结果进行比较,如图 10 所示。

在图 10 中,  $-10^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$  对应为定子齿的位置,  $-22.5^\circ \leq \alpha \leq -10^\circ$  和  $10^\circ \leq \alpha \leq 22.5^\circ$  对应为定子槽的位置。从图 10 可以看出,解析结果与有限元结果变化趋势一致,验证了本文提出的渐变气隙结构下 SPBLDCM 齿槽转矩解析模型的准确性与有效性。但由于在构建齿槽转矩模型中,忽略了永磁体的极间漏磁,且磁密在槽中的路径也是理想化等效为平行直线与四分之一圆弧,这导致复化梯形积分的误差被不断累积,使得解析结果与有限元结果在处于定子槽的位置时有一定偏差。

为进一步验证本文提出的渐变气隙结构下 SPBLDCM 齿槽转矩解析模型的准确性,需分析对起动死点影响最大的齿槽转矩过零点偏移角度和峰值。分别将图 10(a) ~ 图 10(f) 中解析解与有限元解中的齿槽转矩过零点偏移角度和峰值进行对比,如图 11 所示。在均匀气隙结构下,也就是定子偏离圆心距离  $X$  为 0 时,齿槽转矩的过零点偏移角度为  $\alpha = 0$ ,正负峰值以零点为对称点,呈中心对称的形状;在渐变气隙结构下,随着定子偏离圆心距离  $X$  的不断增大,过零点偏移角逐渐增大,但渐有饱和趋势。此时若继续在增加定子偏离圆心距离  $X$ ,只能增大齿槽转矩正峰值,却无法有效地增大过零点偏移角和起动转矩。这是由于定子偏离圆心距离  $X$  过大时会减小气隙磁密,降低电机输出功率。使电机在维持等效功率输出时体积增大,从而引发损耗的增加以及效率的降低。

由图 11 可以看出,解析结果与有限元结果在齿槽转矩计齿槽转矩过零点偏移角度和峰值方面的变化趋势是基本吻合的,但二者在定子偏离圆心距离  $X$  较大时仍存在一定误差,这是因为在仿真中考虑了当  $X$  较大时,最小气隙长度  $g_{\min} \approx 0$  的较为特殊的临界情况。而在实际电机设计中,气隙过小会增大摩擦损耗,给定转子装配带来困难,因此  $g_{\min}$  不可能达到理想状态下的最小值。因此本文提出的渐变气隙结构下 SPBLDCM 齿槽转矩解析模型,能在满足工程实际要求范围内较好地估计齿槽转矩过零点偏移角度和峰值,能够给 SPBLDCM 设计相关人员提供参考,大大缩短电机设计所需时间。

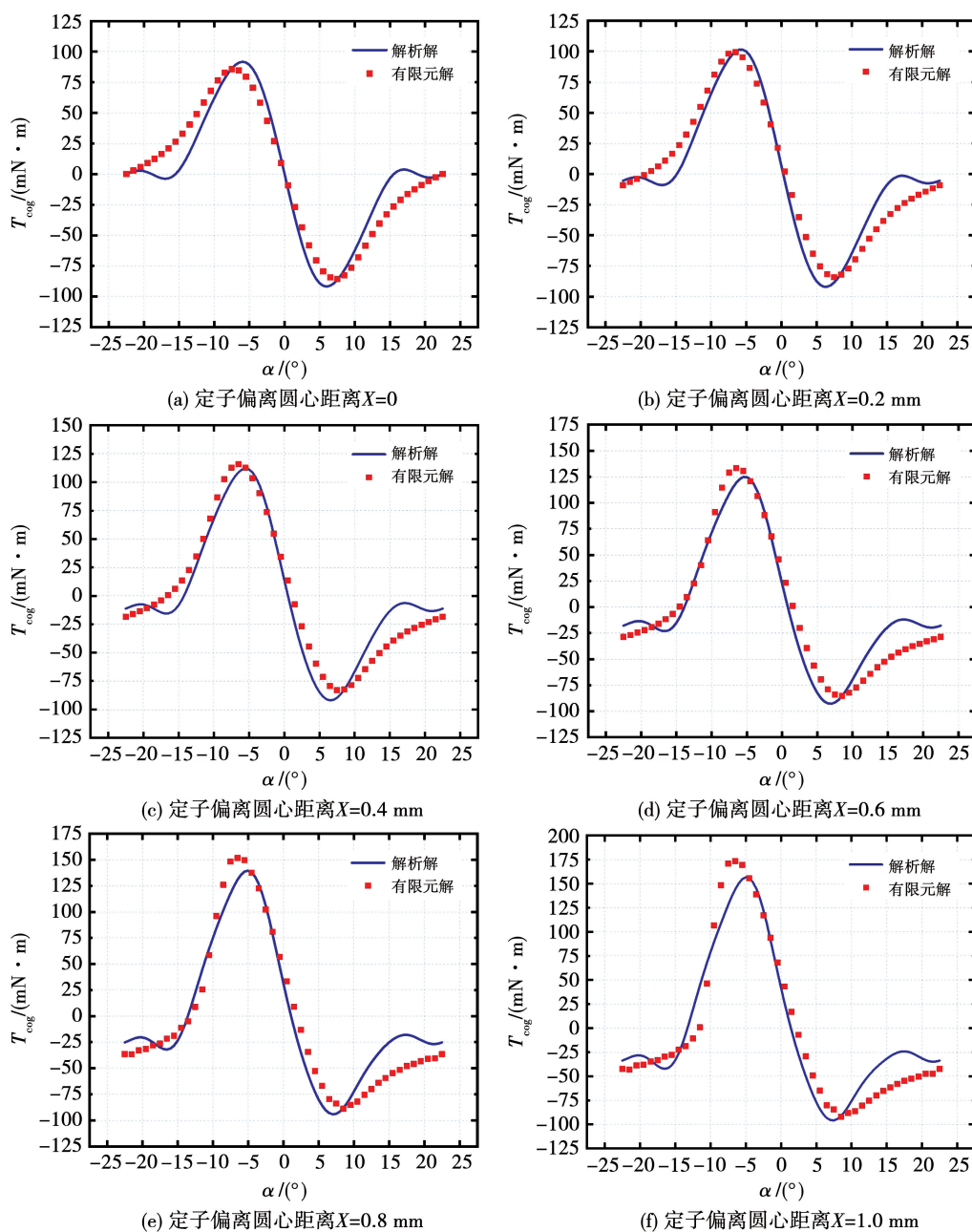


图10 齿槽转矩解析解与有限元解对比  
Fig. 10 Comparison of AM and FEM results of cogging torque

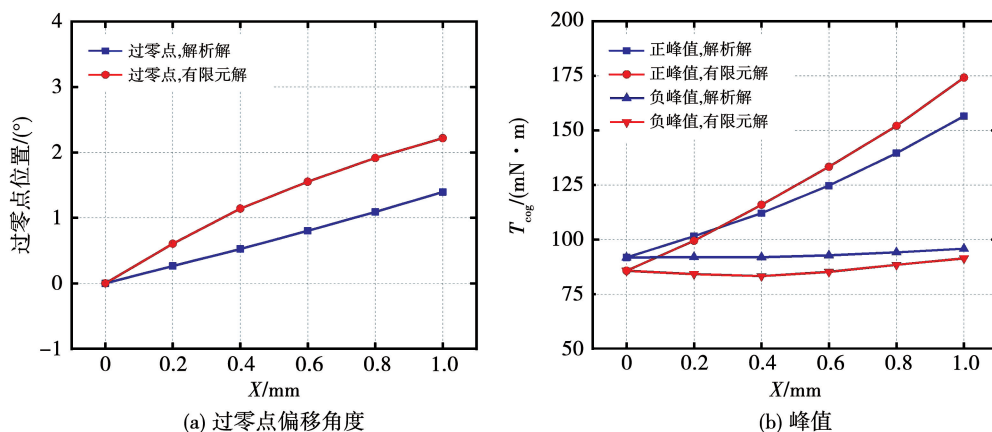


图11 齿槽转矩过零点偏移角度和峰值的解析解与有限元解对比  
Fig. 11 Comparison between AM and FEM results for over-zero offset angle and peak value of cogging torque

## 6 结 论

1) 针对 SPBLDCM 特有的渐变气隙结构,推导了不计及齿槽效应的气隙磁密解析模型,并用有限元法进行验证。计算结果表明,解析解与有限元解具有较好的一致性,表明该模型能较为准确地求解渐变气隙结构下气隙磁密分布。

2) 针对 SPBLDCM 有限元仿真繁琐耗时的问题,利用能量法推导齿槽转矩的解析表达式,并对其中的气隙磁密和有效气隙长度函数进行了简化和傅里叶分解,得到齿槽转矩的解析模型。引入自适应复化梯形公式求解该解析模型,并与有限元法进行对比,验证了解析模型的准确性与有效性。该方法使 SPBLDCM 齿槽转矩模型实现了完全解析化,且解析模型中各变量均与电机结构相关、具有明确的物理意义,为 SPBLDCM 优化设计的自动化编程提供了理论依据。

3) 采用本文建立的 SPBLDCM 齿槽转矩模型,进一步地对定子偏离圆心距离  $X$  为  $0 \sim 1 \text{ mm}$  的渐变气隙结构进行计算,得到不同情况下的齿槽转矩过零点偏移和峰值。计算结果表明,定子偏离圆心距离  $X$  存在一个临界值  $X_m$ ,当  $X \geq X_m$  后,齿槽转矩过零点偏移角渐有饱和趋势,但其正峰值却线性增大。因此,在满足 SPBLDCM 顺利自启动的前提下,应取  $X \leq X_m$  来削弱齿槽转矩峰值,以达到减小转矩脉动、降低噪音和增加电机运行稳定性的目的。本文提出的齿槽转矩解析模型为 SPBLDCM 设计提供了相关参考,有利于设计人员在优化初期就明确齿槽转矩与电机各设计参数之间的变化规律,从而大大缩短电机设计所需时间。

### 参 考 文 献:

- [1] 候海波. 单相永磁无刷直流电机控制系统的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2017.
- [2] SEO J D, YOO J H, JUNG T U. Design on notch structure of stator tooth to reduce of cogging torque of single-phase BLDC motor [C]// 2015 18th International conference on electrical machines and systems: ICEMS 2015, October 25 - 28, 2015, Pattaya, Thailand. 2015:1475 - 1478.
- [3] 郝振洋, 张嘉文, 杨健, 等. 基于单相无刷直流电机的高效全速域无位置控制策略[J]. 电工技术学报, 2023, 38(20): 5444. HAO Zhenyang, ZHANG Jiawen, YANG Jian, et al. High-efficiency full-speed domain sensorless control strategy based on single-phase brushless DC motor [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2023, 38(20): 5444.
- [4] BENTOUATI S, ZHU Z Q, HOWE D. Influence of design parameters on the starting torque of a single-phase PM brushless DC motor[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2000, 36(5): 3533.
- [5] KWON B I, YANG B Y, PARK S C, et al. Novel topology of unequal air gap in a single-phase brushless DC motor[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2001, 37(5): 3723.
- [6] FAZIL M, RAJAGOPAL K R. A novel air-gap profile of single-phase permanent-magnet brushless DC motor for starting torque improvement and cogging torque reduction[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2010, 46(11): 3928.
- [7] 孙立志, 冯琪, 尚静, 等. 高磁负荷单相无刷直流电机的转矩波动抑制[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(13): 146. SUN Lizhi, FENG Qi, SHANG Jing, et al. Torque ripple reduction in single phase brushless DC motors of high magnetic load [J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(13): 146.
- [8] PARK Y U, CHO J H, RHYU S H, et al. A novel cogging torque reduction method for single-phase brushless DC motor[J]. Journal of Magnetics, 2013, 18(2): 117.
- [9] 赖文海, 黄开胜, 胡函武, 等. 基于辅助槽偏移的单相永磁同步电动机齿槽转矩削弱[J]. 微特电机, 2015, 43(9): 11. LAI Wenhai, HUANG Kaisheng, HU Hanwu, et al. Reducing cogging torque in single-phase permanent magnet synchronous motor based on auxiliary slot shifting[J]. Small & Special Electrical Machines, 2015, 43(9): 11.
- [10] AHMED S, LEFLEY P. Study of the impact of asymmetrical stator pole arc on the cogging torque for single phase permanent magnet BLDC motor[C]// 2009 International Conference on Electric Power and Energy Conversion Systems, November 10 - 12, 2009, Sharjah, United Arab Emirates. 2009: 1 - 4.
- [11] 周子馨, 章玮. 单相无刷直流电机双向启动分析[J]. 电机与控制学报, 2020, 24(5): 1. ZHOU Zixin, ZHANG Wei. Analysis of single-phase brushless DC motor bidirectional start-up[J]. Electric Machines and Control, 2020, 24(5): 1.
- [12] 袁子聪, 彭颖卿, 王孟, 等. 基于能量法的单相无刷直流电动机齿槽转矩研究[J]. 微特电机, 2018, 46(1): 1. YUAN Zicong, PENG Yingqing, WANG Meng, et al. Cogging torque analysis based on energy method for single-phase brushless DC motor[J]. Small & Special Electrical Machines, 2018, 46(1): 1.
- [13] 李节宝, 井立兵, 周晓燕, 等. 表贴式永磁无刷电机直接解析计算方法[J]. 电工技术学报, 2012, 27(11): 83. LI Jiebao, JING Libing, ZHOU Xiaoyan, et al. Exact analytical method for surface-mounted permanent-magnet brushless motors [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2012, 27(11): 83.

41(22): 7831.

WANG Likun, LI Yuan, TAO Dajun, et al. Research on coupling heat transfer of fluid and solid under rotating state of water-cooled permanent magnet synchronous motor for compressor[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(22): 7831.

- [32] 郭恩睿, 张凤阁, 戴睿, 等. 高速永磁电机的设计与磁热耦合温升计算[J]. 大电机技术, 2020(3): 1.
- GUO Enrui, ZHANG Fengge, DAI Rui, et al. Design and magnetic-thermal coupling temperature rise analysis of high speed permanent magnet motor[J]. Large Electric Machine and Hy-

draulic Turbine, 2020(3): 1.

- [33] 崔刚, 熊斌, 李振国, 等. 转子温度空间分布差异诱发永磁电机局部失磁特性研究[J]. 中国电机工程学报, 2024, 44(6): 2437.
- CUI Gang, XIONG Bin, LI Zhenguo, et al. Research on local demagnetization characteristics of permanent magnet motor induced by spatial distributeon difference of rotor temperature[J]. Proceedings of the CSEE, 2024, 44(6): 2437.

(编辑:邱赫男)

### (上接第103页)

- [14] 陈书坤, 宁玉富. 基于变步长梯形求积法的 Volterra 积分方程数值解[J]. 无线互联科技, 2020, 17(12): 124.
- CHEN Shukun, NING Yufu. Numerical solution of volterra integral equation based on variable step trapezoid quadrature[J]. Wireless Internet Technology, 2020, 17(12): 124.
- [15] 孟卓, 温和. 基于复化梯形的准同步采样频率测量算法[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(10): 2445.

MENG Zhuo, WENG He. Quasi-synchronous sampling algorithm for frequency measurement based on multiple segment trapezoidal rule [J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(10): 2445.

- [16] 刘绪军. 几种求积公式计算精确度的比较[J]. 南宁职业技术学院学报, 2009, 14(6): 95.
- LIU Xujun. Comparison of calculation accuracy of some quadrature formulas [J]. Journal of Nanning Polytechnic, 2009, 14(6): 95.

(编辑:刘琳琳)